Maria Zaharia

Caiet de vacanță
Matematică
Clasa a VI-a

Suport teoretic, exerciții și probleme aplicative

Ediția a II-a, revizuită

Editura Paralela 45

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1 Mulțimi

1. a) Mulțimea este .... bine determinate și distincte numite ....

b) Mulțimile se notează cu .... , cu sau fără indici: $A, B, C,$ ..... , $A_1, A_2, A_3,$ ..... .

c) Elementele unei mulțimi se notează cu .... : $a, b,$ ..... .

d) Mulțimea care nu are nici un element se numește .... și se notează cu simbolul ....

2. a) Dacă A este o mulțime și x este un element al ei, atunci notăm .... și citim ....

b) O mulțime se numește numerică dacă ....

3. Orice mulțime poate fi dată în trei moduri:

a) **explicit**, prin .... ;

b) **implicit**, ... ;

c) **cu ajutorul unor diagrame Venn–Euler** ....

4. Mulțimea numerelor naturale mai mici decât 5 reprezentată:

a) explicit este $M =$ ....

b) printr-o proprietate caracteristică este $M =$ ....

c) cu ajutorul diagramei Venn–Euler este:

5. O mulțime A se numește:

a) **mulțime finită** dacă .... , de exemplu: mulțimea divizorilor numărului 6 este D_6 ....

b) **mulțime infinită** .... , de exemplu: mulțimea multiplilor unui număr natural este .... $M_6 =$ ....

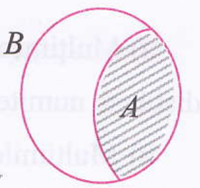
6. Numărul de elemente ale unei mulțimi A se notează cu .... și card $D_6 =$ ....

7. a) **Două mulțimi A și B sunt egale dacă** .... și notăm .... în caz contrar spunem că .... și notăm ....

b) Mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sunt .... și notăm ....

c) Mulțimile $M = \{1, 2, 3\}$ și $N = \{a, b, c\}$ sunt .... și notăm .... , însă au același număr de elemente, mai precis card $M =$ .... = ...

8. a) **O mulțime A este submulțime a mulțimii B** dacă ....



$A \subset B$

Se notează $A \subseteq B$ și se citește „ .... ”.

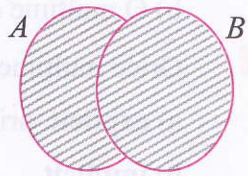
b) Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B, atunci .... și notăm ....

9. a) Mulțimea vidă este submulțime .... și notăm ....

b) Orice mulțime este inclusă în ea însăși, adică ....

c) Mulțimea vidă și mulțimea însăși sunt .... , restul submulțimilor sunt submulțimi ....

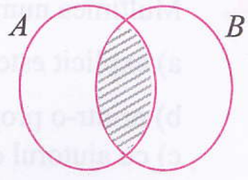
10. a) **Reuniunea a două mulțimi A și B** este .... și scriem $A \cup B =$ ....



$A \cup B$

b) Dacă $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cup B =$ ....

11. a) **Intersecția a două mulțimi A și B** este .... și scriem $A \cap B =$ ....

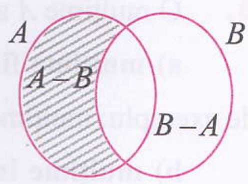


$A \cap B$

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cap B =$ ....

c) Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci A și B se numesc ....

12. a) **Diferența mulțimilor A și B** este .... și scriem $A - B =$ ....



$A - B \neq B - A$

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A - B =$ .... și $B - A =$ ....

13. a) Într-o mulțime fiecare element apare ....

b) Analizând diagramele de mai jos, avem reprezentată o mulțime în figura ....

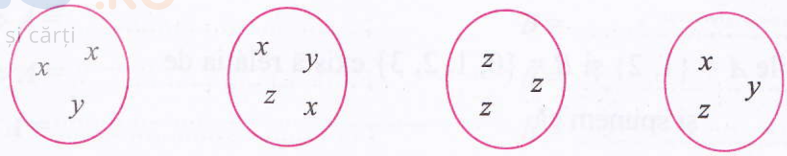


fig. 1 *fig. 2* *fig. 3* *fig. 4*

14. a) Submulțimile mulțimii $M = \{a, b, c\}$ sunt ....

....

b) Numărul de submulțimi ale unei mulțimi A este ....

15. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x^2 \mid x \in A\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$B =$ .... ; $A \cup B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $A \cap B =$ ....

16. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Într-o mulțime nu contează ordinea ...., mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, a, c\}$ sunt .... pentru că sunt formate din ....

b) Mulțimea literelor din care este format cuvântul „element” este $C =$ ....

c) Mulțimea cifrelor este o mulțime .... în timp ce mulțimea numerelor naturale este o mulțime ....

17. Se dă mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^*, x \leq 3\}$.

a) Scrieți mulțimea M prin enumerarea elementelor, $M =$ ....

b) Submulțimile improprii ale mulțimii M sunt ....

c) Submulțimile proprii ale mulțimii M sunt ....

18. Determinați a, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\{1, a, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $\{1, a, 3\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$.

....

19. a) Determinați perechile (x, y) știind că $\{2, x, 4\} \subseteq \{1, 2, y, 3\}$.

b) Determinați perechile (x, y) știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 4\} \subset \{3, x, y, 4\}$; ii) $\{3, x, y, 4\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție: ....

....

20. a) Elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ este restul împărțirii oricărui număr natural la $5\}$ sunt: ....

....

b) Între elementul a și mulțimea $M = \{a, b, c\}$ există relația de ………………………………………
și notăm ……………………………… .

c) Între mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$ există relația de ……………………………………… ;
notăm ……………………………… și spunem că ……………………………………………………………………… .

21. Se consideră mulțimea $M = \left\{\overline{xy} \in \mathbb{N} \mid \overline{xy} \vdots 23\right\}$.

a) Elementele mulțimii M sunt ……………………………………………………………………… .

b) Submulțimile lui M formate din câte două elemente sunt ……………………………………… .

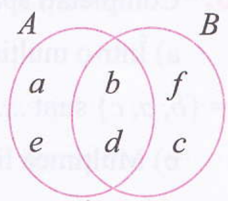
c) Submulțimile lui M formate din câte trei elemente sunt ……………………………………… .

22. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ……………………… $x \in B\}$; c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ ……………………… $x \notin B\}$;

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ ……………………… $x \in B\}$; d) $B \setminus A = \{x \mid x \in B$ ……………………… $x \notin A\}$.

23. Analizați, cu atenție, diagrama și specificați dacă propozițiile ce urmează sunt adevărate sau false:



$a \in A \cap B$ ……… ; $b \notin A \cap B$ ……… ; $\{b, d\} = A \cap B$ ……… ;
$d \notin A \cap B$ ……… ; $e \in A \setminus B$ ……… ; $\{a, c\} \subset A \cup B$ ……… .

24. Se consideră două mulțimi oarecare A și B.

a) Dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci ……………………………………………………………………… .

b) Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci ……………………………………………………………… .

25. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

a) Cel mai mare divizor propriu al mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este ……………………………………………… .

b) Cardinalul mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este ……………………………………………………………… .

c) Cel mai mic element al mulțimii $\mathcal{M}_6 \cap \mathcal{M}_8$ este ……………………………………… .

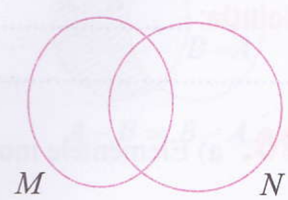
d) Din mulțimea $\mathcal{M}_8$, elementele de forma $\overline{ab}$ sunt ……………………………………… .

26. Dacă $A = \{0, 1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 2, 5, 6\}$, atunci:

$A \cup B =$ ……………………………… ; $A \cap B =$ ……………………………… ;
$A \setminus B =$ ……………………………… ; $B \setminus A =$ ……………………………… .

27. Determinați mulțimile M și N, știind că $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap N = \{2, 3, 4\}$ și $N \setminus M = \{5\}$.

Soluție: ………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
……………………………………………………………………… .



28. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3\}$. Scrieți două mulțimi A și B care să îndeplinească condițiile:

a) $A \cup B = M \Rightarrow A =$ ....; $B =$ ....

b) $A \cap B = M \Rightarrow A =$ ....; $B =$ ....

c) $A \setminus B = M \Rightarrow A =$ ....; $B =$ ....

29. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 \leq 25\}$ și $B = \{z \in \mathbb{N} \mid z^3 \leq 27\}$. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

$A =$ ....; $B =$ ....;

$A \cap B =$ ....; $A \cup B =$ ....;

$A \setminus B =$ ....; $B \setminus A =$ ....

30. Se consideră mulțimile $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a = n^2 + n, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Pentru $n \leq 5$, scrieți mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

....

....

....

b) Arătați că cele două mulțimi sunt disjuncte.

31. a) Fie A mulțimea **divizorilor improprii** ai numărului 12. $A =$ ....

b) Fie B mulțimea **divizorilor proprii** ai numărului 12. $B =$ ....

c) Verificați dacă A și B sunt mulțimi disjuncte, $A \cap B =$ ...., adică mulțimile A și B sunt ....

1.2 Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale

1. a) Un număr natural n se numește **prim** dacă ....

b) Scrieți numerele prime mai mici decât 50 ....

c) Un număr natural n se numește **compus** dacă ....

....

Orice număr natural nenul, diferit de 1, care nu este prim poate fi scris ca un produs de numere naturale prime.

2. a) **Descompunerea în factori primi** a unui număr natural înseamnă ....

....

b) Descompuneți în factori primi următoarele numere naturale: 14 400, 15 600, 5 775.

Rezolvare:

14 400	$2^2 \cdot 5^2$
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$14\,400 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

15 600	

$15\,600 =$

5 775	

$5\,775 =$

Singurul număr prim și par este 2.

3. a) Scrieți ca sumă de numere prime numerele naturale: 7; 12; 26; 34.

$7 = 2 + 5$; $12 =$ .... ; $26 =$ .... ; $34 =$ ....

b) Suma a două numere prime este 99. Numerele sunt ....

c) Produsul dintre un număr natural prim și un număr impar este 4866. Calculați numerele.

....

4. Determinați numerele prime a, b și c, diferite două câte două, știind că:

a) $3a + 4b + 2c = 48$.

Rezolvare: $4b$, $2c$ și 48 sunt numere pare și cum $3a + 4b + 2c = 48 \Rightarrow 3a$ este număr par $\Rightarrow a$ este număr par și cum a este număr prim $\Rightarrow a = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 + 4b + 2c = 48 \Rightarrow 4b + 2c = 48 - 6 \Rightarrow 4b + 2c = 42 \mid : 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2b + c = 21$. Cum $2b$ este număr par și 21 este număr impar $\Rightarrow c$ este număr impar și prim și avem:

$c = 3 \Rightarrow 2b = 18 \Rightarrow b = 9$ (nu este număr prim);
$c = 5 \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow b = 8$ (nu este număr prim);
$c = 7 \Rightarrow 2b = 14 \Rightarrow b = 7$;
$c = 11 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$;
$c = 13 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$ (nu este număr prim);
$c = 17 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Cum numerele trebuie să fie diferite două câte două, rezultă că $a = 2$, $b = 5$ și $c = 11$ sunt numerele căutate.

b) $a + 2b + 4c = 36$

....

....

....

....

....

5. Determinați cifrele distincte a și b, astfel încât $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ să fie numere prime.

....

....

....

6. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că suma dintre $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ este pătrat perfect.

....

7. Dacă $\overline{abc}$ este număr prim, calculați câți divizori are numărul $\overline{abcabc}$.

....

8. a) Care este cel mai mic număr de trei cifre care are exact trei divizori?

....

b) Care este cel mai mare număr de două cifre care are exact patru divizori?

....

9. a) Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b se prescurtează .... și se notează cu ....

b) Pentru a calcula c.m.m.d.c. se procedează astfel:

– se descompun ....

– se iau factorii ....

10. a) Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a și b se prescurtează .... și se notează cu ....

b) Pentru a calcula c.m.m.m.c. se procedează astfel:

– se descompun ....

– se iau factorii ....

11. Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a) 840 și 672

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2\cdot 5 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 672 & 2 \\ 336 & 2 \\ 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$840 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$;
$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$;
$[840; 672] = 2^5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3360$;
$(840; 672) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.

b) 675 și 864

675 | 864 |

675 = ...

864 = ...

[675; 864] = ...

(675; 864) = ...

Pentru $a, b \in \mathbb{N}$, avem $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

12. Verificați această proprietate pentru:

a) $a = 192$ și $b = 144$

192 | 144 |

192 = ... ; 144 = ...

(192; 144) = ... [192; 144] = ...

$\left.\begin{array}{l}(192; 144) \cdot [192; 144] = \text{..........} \\ 192 \cdot 144 = \text{..........}\end{array}\right\} \Rightarrow (192; 144) \cdot [192; 144] =$

= .... = 192 · 144

b) $a = 450$ și $b = 224$.

450 | 224 |

450 = ... ; 224 = ...

(450; 224) = ... [450; 224] = ...

$\left.\begin{array}{l}(450; 224) \cdot [450; 224] = \text{..........} \\ 450 \cdot 224 = \text{..........}\end{array}\right\} \Rightarrow$ ....

Două sau mai multe numere naturale care au cel mai mare divizor comun egal cu 1 se numesc *numere prime între ele.*

13. Scrieți perechile de numere prime între ele care se pot forma cu numerele: 9, 2, 4 și 14.

$2 = 2$; $9 = 3^2$; $4 = 2^2$; $14 = 2 \cdot 7$;

$(2, 9) = 1 \Rightarrow 2$ și 9 sunt prime între ele;

$(2, 4) = 2 \Rightarrow 2$ și 4 nu sunt prime între ele;

(2, 14) = ... ; (9, 14) = ... ;

(9, 4) = ... ; (4, 14) = ...

Deci, perechile de numere prime între ele sunt (2, 9); ....

14. Aflați cifra x astfel încât:

a) $\left(\overline{31x}, 2\right) = 1 \Rightarrow x$ nu trebuie să fie cifră pară $\Rightarrow x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

b) $\left(\overline{1x}, 3\right) = 1 \Rightarrow$ .... ;

c) $\left(\overline{1x5}, 2\right) = 1, \Rightarrow$ .... ;

d) $\left(\overline{53x}, 5\right) = 1 \Rightarrow$ ....

15. În mulțimea numerelor naturale, divizibilitatea are următoarele proprietăți:

a) **Reflexivitate**, ...

b) **Antisimetrie**, ...

c) **Tranzitivitate**, ...

d) Dacă $a \mid b$ și $a \mid c$, atunci $a \mid$ .... , ...

e) Dacă $a \mid b \cdot c$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid$ ....

16. a) Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{2xy}$ divizibile cu 15.

b) Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{3x1y}$ divizibile cu 6.

Rezolvare: a) $15 \mid \overline{2xy} \Leftrightarrow 5 \mid \overline{2xy}$; $3 \mid \overline{2xy}$ și $(5, 3) = 1$. Dar $5 \mid \overline{2xy} \Leftrightarrow y \in \{0, 5\} \Leftrightarrow \overline{2xy} \in \{\overline{2x0}, \overline{2x5}\}$. Cum $3 \mid \overline{2x0} \Leftrightarrow 3 \mid (2+x+0) \Leftrightarrow 3 \mid (2+x) \Leftrightarrow x \in \{1, 4, 7\} \Leftrightarrow \overline{2x0} \in \{210, 240, 270\}$. Cum $3 \mid \overline{2x5} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 \mid (2+x+5) \Leftrightarrow 3 \mid (7+x) \Leftrightarrow x \in \{2, 5, 8\} \Leftrightarrow \overline{2x5} \in \{225, 255, 285\}$. Numerele căutate sunt: 210, 225, 240, 255, 270, 285.

b) $6 \mid \overline{3x1y} \Leftrightarrow$ ....

....

....

....

Numerele căutate sunt: ....

17. a) Determinați numerele naturale a și b, știind că cel mai mare divizor comun al lor este 7 și suma lor este 35.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 7 \Rightarrow a = 7x$, $b = 7y$, unde $(x, y) = 1$. Dar $a + b = 35 \Rightarrow 7x + 7y = 35 \mid : 7 \Rightarrow$ $x + y = 5$, adică:

x	1	4	2	3
y	4	1	3	2
$a = 7x$	7	28	14	21
$b = 7x$	28	7	21	14

Numerele căutate sunt: $a = 7$, $b = 28$ sau $a = 28$, $b = 7$ sau $a = 14$, $b = 21$ sau $a = 21$, $b = 14$.

b) Determinați numerele naturale a și b, știind că $(a, b) = 5$ și $a + b = 25$.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 5 \Rightarrow a =$ ..... , $b =$ ..... , unde $(x, y) = 1$. Dar $a + b = 25 \Rightarrow$ .... , adică:

x	
y	
$a = 5x$	
$b = 5x$	

Numerele căutate sunt: ....

c) Determinați numerele naturale a și b, știind că $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 2160$.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 12 \Rightarrow a =$ ..... , $b =$ ..... , unde $(x, y) = 1$. Dar $a \cdot b = 2160 \Rightarrow$ .... , adică:

x	
y	
$a = 12x$	
$b = 12x$	

Numerele căutate sunt: ....

Prin scrierea $x - 1 \in \mathcal{D}_{15}$ înțelegem $x - 1 \in \{1, 3, 5, 15\} \Rightarrow x \in \{2, 4, 6, 16\}$.

18. a) Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $2x + 1 \in \mathcal{D}_{11}$.

....

b) Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $x + 1$ să fie divizor propriu al lui 6.

....

19. a) Arătați că numerele de forma $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 27, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare: $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 3^n \cdot 5^n + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^n + 3^{n+2} \cdot 5^n =$
$= 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot (5 + 1 + 3) = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 9 = 3^n \cdot 5^n \cdot 3 \cdot 9 = 27 \cdot 3^n \cdot 5^n = 27 \cdot (3 \cdot 5)^n = 27 \cdot 15^n$.
Cum $27 \cdot 15^n \vdots 27 \Rightarrow$ numerele de forma $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 27.

b) Arătați că numerele de forma $72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$ sunt divizibile cu 63, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

....

....

....

20. Determinați cel mai mare număr natural nenul care împărțit la 7 dă câtul egal cu restul.

Rezolvare: Fie a numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest, $D = Î \cdot C + R$, $R < Î$, obținem $a = 7 \cdot C + R$, $R < 7 \Rightarrow R \in \{1, 2, ..., 6\}$.

Cel mai mare număr natural se obține pentru R = ... și a = ...

21. Împărțind numerele 131, 284, 197 la același număr natural nenul se obțin resturile 7, 5 și 11 și câturile nenule. Aflați împărțitorul.

Rezolvare: Din teorema împărțirii cu rest, $D = Î \cdot C + R$, $R < Î$, avem: $131 = Î \cdot C_1 + 7$, $7 < Î \Rightarrow$
$\Rightarrow 131 - 7 = Î \cdot C_1$; $284 = Î \cdot C_2 + 5$, $5 < Î \Rightarrow 284 - 5 = Î \cdot C_2$; $197 = Î \cdot C_3 + 11$, $11 < Î \Rightarrow 197 - 11 =$
$= Î \cdot C_3 \Rightarrow 124 = Î \cdot C_1$, $279 = Î \cdot C_2$ și $186 = Î \cdot C_3$.

124 | 279 | 186 |

124 = ... ; 279 = ... ; 186 = ...

$Î = (124, 279, 186) =$ ....

Cum $Î > 11 \Rightarrow Î =$ ....

22. Aflați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 6, 15 și 24 dă resturile 4, 13 și, respectiv, 22.

Rezolvare: Fie a numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest, $D = Î \cdot C + R$, $R < Î$, avem:

$a = 6 \cdot C_1 + 4 \,|\, + 2 \Rightarrow a + 2 =$ .... ;

$a = 15 \cdot C_2 + 13 \,|\, + 2 \Rightarrow a + 2 =$ .... ;

$a = 24 \cdot C_3 + 22 \,|\, + 2 \Rightarrow a + 2 =$ .... $\Rightarrow a + 2 = [6, 15, 24] =$ .... $\Rightarrow$
$\Rightarrow a =$ ....

Numărul căutat este: ....